Travaux dirigés 6 :

Exercice 1 : Bilan des forces sur des ressorts

1. $\vec{f} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$
2. $\vec{f} = -k(x_H - x - l_0)(-\vec{u}_x)$
3. $\vec{f} = -k(x - x_H - l_0)\vec{u}_x$
4. $\vec{f} = -k(-z - l_0)(-\vec{u}_z)$
5. $\vec{f} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$
6. C'est plus compliqué, détaillons :

D'abord, cherchons l'expression de la force exercée par le premier ressort sur M1 :

$$\vec{f_1} = -k(x_1 - l_0)\vec{u}_x$$

Ensuite, celle exercée par le deuxième ressort sur M1 :

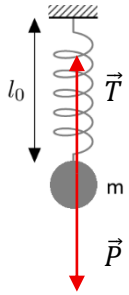
$$\vec{f_2} = -k'(x_2 - x_1 - l'_0)(-\vec{u}_x) = k'(x_2 - x_1 - l'_0)\vec{u}_x$$

La force exercée par le deuxième ressort sur M2 s'écrit :

$$\vec{f_3} = -k \quad (x_2 - x_1 - l'_0)\vec{u}_x$$

Exercice 2 : Ressort vertical

1.
2.



$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -ky \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Introduisons la notation l_{eq} pour la longueur à l'équilibre. On peut écrire :

$$-k(l_{eq} - l_0) + mg = 0$$

$$l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -k(y + l_{eq} - l_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

4. En utilisant la deuxième ligne de l'équation précédente :

$$k(y + l_{eq} - l_0) + mg = m\ddot{y}$$

5.

$$-k\left(y + l_0 + \frac{mg}{k} - l_0\right) + mg = m\ddot{y}$$

$$-ky = m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

On reconnait bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

6. On propose d'utiliser la solution :

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\ sin(\omega_0 t)$$

La première condition initiale est $L = 3/2\ l_0$:

$$y(0) = A\cos(0) + B\ sin(0) = A = \frac{3}{2}l_0$$

La seconde condition initiale est $\dot{y}(0) = 0$

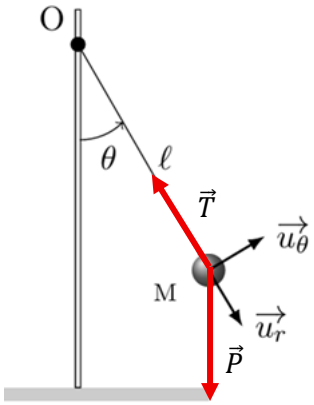
$$\dot{y}(0) = -A\,\omega_0 \sin(0) + B\omega_0\ cos(0) = B\omega_0 = 0$$

On obtient donc :

$$y(t) = \frac{3}{2}l_0\cos(\omega_0 t)$$

Travaux dirigés 7 :

Exercice 1 : Pendule simple

1. 

2. On peut écrire :

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mgcos\theta \\ -mgsin\theta \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

3. On obtient deux équations :

$$-\frac{T}{m} + gcos\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$-gsin\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

4. En utilisant la projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$ et en faisant l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $sin\theta \approx \theta$ alors on trouve :

$$-g\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

Mais comme le fil est inextensible :

$$-g\theta = l\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On reconnait bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

5. Prenons comme solution l'expression suivante :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\, sin(\omega_0 t)$$

En utilisant le fait que $\theta(t) = \theta_0$ on trouve :

$$\theta(0) = A = \theta_0$$

En utilisant le fait que $\dot{\theta}(t) = 0$ on trouve :

$$\dot{\theta}(0) = B\omega_0 cos(\omega_0 t) = 0$$

Soit au final :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exercice 2 : Mode de vibration d'une molécule de HCl

1. En comparant les masses molaires on se rend compte que l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène. Il est donc raisonnable de penser que l'atome de chlore est fixe et l'atome d'hydrogène en mouvement.
2. Le système est équivalent à un mobile (l'atome H) relié à un support fixe (l'atome Cl) par un ressort, c'est-à-dire un oscillateur harmonique. Sa fréquence propre f est alors reliée à la masse $m_H = M_H/N_A$ de l'atome H et à la raideur k du ressort par :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_H}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{N_A k}{M_H}}$$

D'où :

$$k = \frac{4\pi^2 f^2 M_H}{N_A} = 4{,}7.10^2 N/m$$

3. La vitesse de l'atome d'hydrogène est maximale lorsque celui-ci passe par sa position équivalent au repos, où le ressort n'est ni étiré ni compressé.
4. On a alors :

$$E_{totale} = E_C = \frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}\, m_H {v^2}_{max}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{hfN_A}{M_H}} = 5{,}8.\frac{10^3 m}{s}$$

5. L'énergie potentielle élastique est maximale quand le ressort est étiré au maximum, c'est-à-dire à son amplitude maximale A.
6. On peut écrire :

$$E_{totale} = E_{pe} = \frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2 f^2 M_H}{N_A}\, A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{hN_A}{4\pi^2 f^2 M_H}} = 1{,}1.10^{-11} m = 11pm$$

La longueur de la liaison varie de 10% en vibrant.